

Apprentissage & Reconnaissance des Formes:
Arbres de décisions & méthodes ensemblistes
(3/10)

S. Herbin, **B. Le Saux**, A. Boulch

`bertrand.le_saux@onera.fr`

14 janvier 2018

Introduction

Introduction

- ▶ Plusieurs algorithmes de classification supervisée ont déjà été étudiés : plus proche voisin, classifieur Bayésien, machine à vecteurs de support (SVM).
- ▶ Concepts : minimisation du risque empirique, surapprentissage, dilemme biais variance

Objectifs

- ▶ Un nouveau type de classifieur : l'arbre de décision
- ▶ Une famille de classifieurs : les approches ensemblistes
- ▶ Intuition : un groupe prend plus souvent de meilleures décisions qu'un individu

Arbres de décision et méthodes ensemblistes : plan

Arbres de décision

Méthodes ensemblistes

Random Forests

Boosting

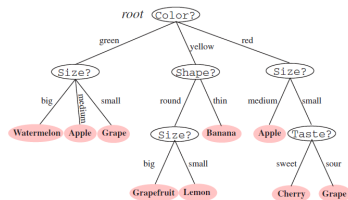
Conclusion

Arbres de décision

Arbres de décision

Objectif

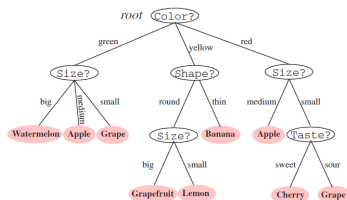
- ▶ Classification en posant une série de questions fermées
- ▶ Questions organisées sous forme d'arbre



Arbres de décision

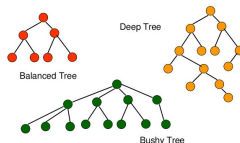
Terminologie (structure)

- ▶ **Donnée** représentées par des attributs (ex: attributs d'un fruit = couleur, taille, forme, goût...)
- ▶ **Noeud de décision** lié à un test sur un des attributs
- ▶ **Branche** qui représente des valeurs possibles de l'attribut testé
- ▶ **Noeud terminal** ou feuille, liée à la classe (prédiction)



Arbres de décision

Quelles questions se poser pour construire un arbre?



Questions globales:

- ▶ Quelle structure choisir (profond, équilibré,...)
- ▶ Combien de découpages par noeud ? (binaire, plus)
- ▶ Quand s'arrêter de découper ?

Questions locales:

- ▶ Quel attribut choisir, et quel test lui appliquer?
- ▶ Si l'arbre est trop grand, comment élaguer?
- ▶ Si une feuille n'est pas pure, quelle classe attribuer?

Arbres de décision : structure

Choix de la structure

Soit X un ensemble d'attributs $x_i = \{A_i\}_{1 \leq i \leq N}$, avec A_i valeurs numériques ou symboliques.

Recherche du plus petit arbre de décision compatible avec X :

- ▶ Principe du rasoir d'Occam: trouver l'hypothèse la plus simple possible compatible avec les données
- ▶ Principe Minimum Description Length: trouver l'hypothèse qui produit les plus courts chemins pour classifier l'ensemble X

Mais... recherche exhaustive impossible (problème NP-complet)

⇒ Algorithmes spécifiques tel que: le risque empirique (l'erreur sur l'ensemble d'apprentissage) est minimal, et arbre consistant avec *la plupart* des données.

Arbres de décision : algorithmes

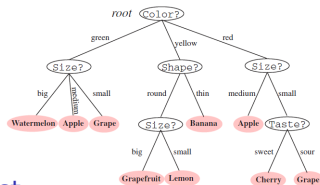
Principe général

Construction top-down, récursive d'un *petit* arbre consistant avec la *plupart* des données.

Trois étapes

1. Décider si un noeud est terminal
2. Si un noeud n'est pas terminal, choisir un attribut et un test
3. Si un noeud est terminal, lui associer une classe

Arbres de décision : algorithmes



Choisir un attribut et un test

⇒ Algorithmes récursifs (par exemple ID3, C4.5, CART...)

Fonction Construire-arbre(X)

SI tous les points de X sont de même classe,
créer une feuille associée à cette classe

SINON

- ▶ choisir la meilleure paire (A_i, test) pour créer un noeud
- ▶ ce test sépare X en 2 parties X_g et X_d
- ▶ Construire-arbre(X_g)
- ▶ Construire-arbre(X_d)

Arbres de décision : algorithmes

Choix attribut et test

⇒ Mesure de l'hétérogénéité des noeuds candidats.

- ▶ Entropie : $H = - \sum p(c_k) \log_2(p(c_k))$ avec $p(c_k) = N_k/N$
probabilité de la classe c_k dans l'ensemble courant
→ ID3, C4.5, mesure l'information
- ▶ Indice de Gini : $I = \sum p(c_k)(1 - p(c_k)) = 1 - \sum p(c_k)^2$
→ CART, mesure les inégalités
- ▶ Indice d'erreur : $I = 1 - \max(p(c_k))$

Arbres de décision : algorithmes

Choix attribut et test

⇒ Gain d'homogénéité apporté par un test T pour séparer un noeud N en noeuds N_j .

- ▶ À chaque noeud, choix de T maximisant
$$Gain(N, T) = I(N) - \sum_j p(N_j) I(N_j)$$
- ▶ En pratique, approche empirique pour tout A_i tri des valeurs par ordre croissant et tests tirés selon une approche dichotomique (médiane, etc...)

Arbres de décision : algorithmes

Décider si un noeud est terminal

- ▶ Tous ou la plupart des exemples de l'ensemble sont d'une même classe
- ▶ *Early-stopping* selon critère : nombre minimal d'exemples par noeud; hétérogénéité ne décroît plus

Élagage

- ▶ Vise à couper les branches qui nuisent à la généralisation de la classification
- ▶ Approche bottom-up en supprimant les noeuds qui permettent de réduire le risque empirique sur un ensemble de validation

Arbres de décision : Résumé

Points clés des arbres de décision

- + Interprétabilité
- + Apprentissage et classification rapides et efficaces, y compris en grande dimension.
- Tendance au surapprentissage (en partie contrôlable par l'élagage)
- **Variance élevée** : sensibilité au bruit et aux points aberrants, instabilité

Utilisations

- + Classification ou régression...
- + Capables de traiter des données numériques, mais aussi symboliques

Méthodes ensemblistes

Méthodes ensemblistes

Définition

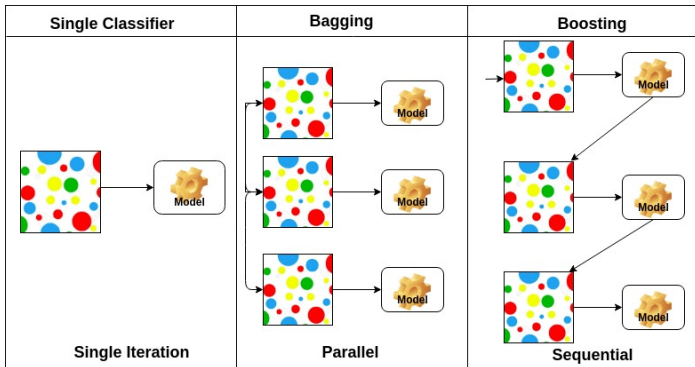
- ▶ Méthodes agrégeant des *ensembles* de classifieurs;
- ▶ Classifieurs différents : soit en changeant les données, soit en changeant le type de classifieurs;
- ▶ Classe finale = vote de l'ensemble.

Objectifs

- ▶ *L'union fait la force*: comment tirer parti de plusieurs classifieurs plus ou moins médiocres pour faire un classifieur performant
- ▶ *Réduire la variance* et moyenner les erreurs

Méthodes ensemblistes

Deux grandes approches: bagging et boosting



Random Forests

Un mot sur le bagging

Comment changer les données pour construire différents classifieurs, alors qu'on ne dispose que d'un jeu d'entraînement X ?

- ▶ Couper X en plusieurs sous-ensembles ? \rightarrow peu de données pour chaque classifieur;
- ▶ Bagging : générer $\tilde{X}_1, \dots, \tilde{X}_M$ de même taille que X par tirage avec remise.
- ▶ \tilde{X}_j similaires, mais pas trop : proba d'un exemple de ne pas être sélectionné $p = (1 - 1/N)^N$. Quand $N \rightarrow \infty$, $p \rightarrow 0.3679$.

Random Forests

Un mot sur le bagging

Comment changer les données pour construire différents classifieurs, alors qu'on ne dispose que d'un jeu d'entraînement X ?

- ▶ ...
- ▶ Entraîner M fois le même algorithme f_i (arbre, réseau de neurones, SVM..) sur chaque \tilde{X}_j et agréger par vote majoritaire ou moyenne $f(x) = \frac{1}{M} \sum f_i(x)$

Objectifs

- ▶ Chaque classifieur a un biais différent, lié à $\tilde{X}_j \rightarrow$ l'agrégat a une variance réduite
- ▶ Méthode alternative pour la régularisation

Random Forests

Forêts aléatoires ou *Random forests*

⇒ Combiner hasard et bagging pour construire un ensemble d'arbres de décision (=forêt)

- ▶ Constat: la partie calculatoire des arbres de décision est le choix de la structure (meilleure paire attribut & test)
- ▶ La structure devient un arbre de profondeur fixe et des choix aléatoires des attributs et des tests associés

Random Forests

Forêts aléatoires ou *Random forests*

Algorithme:

POUR $k = 1 \dots K$:

- ▶ Bagging : tirage de \tilde{X}_k de même taille que X
- ▶ Tirage (avec remise) de q attributs A_i parmi les N
- ▶ Construction de l'arbre G_k avec des seuils aléatoires
- ▶ Construction de f_k la fonction de décision de G_k dont les feuilles sont remplies avec \tilde{X}_k

Aggrégation:

- ▶ $f(x) = \frac{1}{K} \sum f_k(x)$ (régression)
- ▶ $f(x) = \text{Vote majoritaire}(f_1(x), \dots, f_K(x))$

Random Forests : Résumé

Points clés des forêts aléatoires

- + Très efficaces!
- + Arbres plus décorrélés que par simple bagging
- + Grande dimension
- + Robustesse
- Temps d'entraînement (mais aisément parallélisable).

Utilisation

- ▶ Choix d'une faible profondeur (2 à 5), autres hyper-paramètres à estimer par validation croisée
- ▶ Classification et régression
- ▶ Données numériques et symboliques

Boosting

Un mot sur les systèmes à classifieurs multiples

- ▶ Toujours un jeu d'entraînement X , plusieurs classifieurs différents f_i à disposition
 - ▶ Classifieurs variés: k-NN, réseau de neurones, SVM...
 - ▶ Simplement chaque attribut associé à un test linéaire
 - ▶ Chaque dimension d'un descripteur ou caractéristique calculée sur une donnée (cf. Cours 1 et 2)
- ▶ La décision finale est : $f(x) = \frac{1}{M} \sum f_i(x)$ ou $f(x) = \text{Vote majoritaire}(f_1(x), \dots, f_K(x))$

Objectifs

- ▶ Chaque classifieur f_i a un biais différent \rightarrow l'agrégat a une variance réduite
- ▶ Régularisation pour contre-balancer le sur-apprentissage.

Boosting

AdaBoost

- ▶ X un ensemble d'attributs $x_i = \{A_i\}_{1 \leq i \leq N}$
- ▶ H un ensemble de classifieurs $f_k \mapsto -1, 1$, pas forcément performants \rightarrow appelés *weak learners*

Objectif du boosting:

- ▶ Construire un classifieur performant $F(x) = \sum_{k=1}^K \alpha_k f_k(x) \rightarrow$ appelé *strong learner*
 - ▶ Moyenne *pondérée* des *weak learners*
- ▮▮▮ Comment trouver les poids ?

Boosting

AdaBoost

- ▶ Adaboost = “Adaptive boosting algorithm”, itératif, qui cherche à minimiser l’erreur globale de F
- ▶ Intuition : à chaque itération k , modifier F^k de manière à donner plus de poids aux données *difficiles* (mal-classées) qui permettent de corriger les erreurs commises par F^{k-1}

Boosting

AdaBoost : algorithme

Initialiser les poids liés aux données:

$$d^0 \leftarrow \left(\frac{1}{K}, \frac{1}{K}, \dots, \frac{1}{K} \right)$$

POUR $t = 1 \dots K$:

- ▶ Entraîner f_k sur les données X pondérées par d^{k-1}
- ▶ Prédire $\hat{y} = y^j \leftarrow f_k(x_i), \forall i$
- ▶ Calculer l'erreur pondérée $\epsilon^k \leftarrow \sum_i d_i^{k-1} [y_i \neq \hat{y}_i]$
- ▶ Calculer les paramètres adaptatifs $\alpha^k \leftarrow \frac{1}{2} \log \left(\frac{1-\epsilon^k}{\epsilon^k} \right)$
- ▶ Re-pondérer les données $d^k = d_i^k \leftarrow d_i^{k-1} \exp(-\alpha^k y_i \hat{y}_i)$

Classifieur (pondéré) final : $F(x) = \text{sgn} \left(\sum_{k=1}^K \alpha_k f_k(x) \right)$

Gradient Boosting

Gradient Boosting

Variante: version additive pas-à-pas

- ▶ X un ensemble d'attributs $x_i = \{A_i\}_{1 \leq i \leq N}$
- ▶ H un ensemble de classifieurs $h \mapsto -1, 1$, pas forcément performants \rightarrow appelés *weak learners*

Objectif du gradient boosting:

- ▶ Construire un classifieur performant
$$F_T(x) = \sum_{t=1}^T \alpha_t f_t(x) = F_{T-1}(x) + \alpha_T f_T(x)$$
 où f_t est l'un des weak learners h .
- ▶ Moyenne pondérée des *weak learners* choisis par tirage avec remise
- ▶ Il s'agit à chaque étape de minimiser le risque empirique :
$$\mathcal{L}(F_T) = \sum_{n=1}^N l(y_n F_T(x_n))$$
 où l est une pénalité (*loss*)

Gradient Boosting

Pénalités

- ▶ Adaboost \rightarrow gradient boost avec fonction de pénalité
 $l(y, f(x)) = \exp(-yf(x))$
- ▶ Adaboost peut donc être vu comme la construction itérative d'un classifieur optimal par minimisation du risque empirique à chaque pas.
- ▶ Cadre plus général : d'autres pénalités sont possibles :
 - ▶ LogitBoost : $l(y, f(x)) = \log_2(1 + \exp[-2yf(x)])$
 - ▶ L_2 Boost : $l(y, f(x)) = (y - f(x))^2/2$
 - ▶ DoomII : $l(y, f(x)) = 1 - \tanh(yf(x))$
 - ▶ Savage : $l(y, f(x)) = \frac{1}{(1 + \exp(2yf(x)))^2}$
- ▶ DoomII et Savage sont non-convexes \rightarrow plus robustes aux données bruitées

Gradient Boosting

Pourquoi *Gradient Boosting* ?

- ▶ On a vu que chaque étape minimise le risque empirique :
 $\mathcal{L}(F_T) = \sum_{n=1}^N l(y_n F_T(x_n))$ où l est une pénalité (*loss*)
- ▶ Lors de la variante additive d'adaboost, $\alpha_T f_T(x)$ peut donc être vu comme le *weak learner* qui approxime le mieux le pas d'une descente de gradient dans l'espace des fonctions de classification
- ▶ Une version exacte de la descente de gradient donne les Gradient Boosting Models :
$$F_T(x) = F_{T-1}(x) + \alpha_T \sum_{i=1}^N \nabla_{F_{T-1}} l(y_i, f_{T-1}(x_i))$$
- ▶ Extreme Gradient Boosting reprend cette idée et dispose de 2 atouts :
 - ▶ Bibliothèque disponible en R ou python
 - ▶ Très efficace → à mettre dans la boîte à outil du *data scientist*

Boosting : Résumé

Points clés du boosting

- ▶ Aggrégation adaptative de classifieurs moyens
- + Résultats théoriques sur la convergence et l'optimalité du classifieur final
- + Très efficace (améliore n'importe quel ensemble de classifieurs)
- + Facile à mettre en oeuvre (moins vrai pour XGBoost)
- Sensibilité aux données aberrantes, surapprentissage

Utilisations

- ▶ Choix du *weak learner* : ne doit pas être trop bon, sinon surapprentissage
- ▶ Choix de la pénalité en fonction du bruit des données
- ▶ Variantes pour la classification et la régression

Conclusion

Cours n°3: Arbres de décision et méthodes ensemblistes

Notions phares du jour

- ▶ Arbres de décision (vote, homogénéité)
- ▶ Aggrégation de classifieurs
- ▶ Bagging, Random Forests
- ▶ Boosting, GradientBoost

Concepts généraux

- ▶ Classification / régression
- ▶ Bagging et randomisation (Forêts aléatoires)
- ▶ Construction adaptative à partir de *weak learners* et optimisation dans l'espace des classifieurs (Boosting)